

**중등심화수학**

**대수 - 중**



**올림피아드 수학원**

**신샘수학교실 T. 439-4312**



## § 1. 집합과 원소

## [예제 1.] 집합의 표현

집합  $\left\{x \mid |2x-1| < 6, \frac{x+2}{3} \in Z\right\}$  을 원소나열법으로 나타내어라. (단,  $Z$ 는 정수의 집합)

[1992 시 경시]

2. 집합  $\{a+b \mid 2ab-b-4a=8, a \text{와 } b \text{는 자연수}\}$ 에 속하는 모든 원소의 합은 얼마인가?<sup>2)</sup>

3.  $a, b$ 는 음이 아닌 정수로서  $3a+7b$ 의 꼴로 나타내는 자연수 전체의 집합을  $A$ 라고 한다.

예를 들면  $47=3 \times 4 + 7 \times 5$  로  $47$ 은  $A$ 의 원소이다. 이때 다음 물음에 답하여라.<sup>3)</sup>

- 1) 10 이하의 자연수로  $A$ 의 원소인 것을 모두 구하여라.
- 2)  $n$ 이  $A$ 의 원소일 때,  $n+3$ 도  $A$ 의 원소임을 보여라.
- 3) 연속하는 세 자연수  $m, m+1, m+2$ 가 모두  $A$ 의 원소가 되는 자연수  $m$  가운데 최소의 것을 구하여라.
- 4) 3)에서 구한  $m$  이상의 임의의 자연수  $n$ 은  $A$ 의 원소임을 증명하여라.



[예제 4.] 집합과 원소의 관계

자연수를 원소로 갖는 집합 S가 있다. 다음 조건을 만족시키는 집합 S의 개수를 구하여라.<sup>4)</sup>

$$x \in S \text{ 이면 } 6 - x \in S \text{ 이다.}$$

5. 아래 조건을 만족시키는 전체집합 U의 부분집합 A가 될 수 있는 것은?(단, 각 집합의 원소는 크기가 작은 순으로 나열한 것이다.)<sup>5)</sup> [성균관대 제6회 중2, 2점]

- (1)  $U = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$   
(2)  $m, n \in A$  이고,  $m + n \in U$  이면,  $m + n \in A$  이다.

- ①  $\{4, 34, 38, 42, \dots, 94, 100\}$                       ②  $\{5, 25, 30, 35, \dots, 95, 100\}$
- ③  $\{10, 15, 20, 25, \dots, 95, 100\}$                       ④  $\{15, 20, 25, 30, \dots, 90, 95\}$
- ⑤  $\{16, 31, 47, 48, \dots, 99, 100\}$

6. 집합  $A = \{x \mid x = 2^a \times 3^b \times 5^c, 1 \leq x \leq 20\}$ 가 있다. 4의 배수를 모두 포함하고, 12이외의 3의 배수를 적어도 한 개 포함하는 A의 부분집합의 개수를 구하여라.(단, a, b, c는 모두 음이 아닌 정수이다.)<sup>6)</sup>  
[1996 시 경시]



## §2. 집합의 연산과 유한집합의 원소의 개수

## [예제 7.] 연산조건을 만족하는 원소와 집합의 구성

집합  $A = \{a, b, c\}$ 의 부분집합을 원소로 갖고 보기와 같은 두 성질을 갖는 집합을  $T$ 라고 정의할 때, 원소를 4개 갖는 집합  $T$ 를 모두 구하여라. (25점) (2001 학교경시)

<보기>

$$(1) A \in T \text{ 이고 } \emptyset \in T$$

$$(2) X \in T, Y \in T \text{ 이면 } (X \cup Y) \in T \text{ 이고 } (X \cap Y) \in T$$

8. 두 집합  $A$ 와  $B$ 가 다음과 같을 때, 합집합  $A \cup B$ 의 원소는 모두 몇 개인가? (8)

[2001년 후기 KMC 중3, 4점]

$$A = \{x \mid x = 3n, 0 < x \leq 2000, n \text{은 자연수}\}$$

$$B = \{x \mid x = (2m)^2, 0 < x \leq 2000, m \text{은 자연수}\}$$

9. 양의 실수  $a$ 와  $b$ 에 대하여, 집합  $A$ 는  $A = \{x \mid a \leq 2^x \cdot b < 128a, x \text{는 정수}\}$ 라 정의한다. 이 때, 집합  $A$ 의 원소의 개수를 구하여라. (9) [1997 시 경시]





[예제 10.] 조건을 만족하는 원소의 개수

자연수들로 이루어진 두 집합  $X, Y$ 에 대하여  $X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$ 로 정의하자.  $X$ 를 5의 배수의 집합, 즉  $X = \{5, 10, 15, \dots\}$ ,  $Y$ 를 7의 배수의 집합,  $Y = \{7, 14, 21, \dots\}$ 라 할 때,  $X+Y$ 의 원소 중에서 1996 이하의 개수를 구하여라.<sup>10)</sup>

11. 50 명의 학생이 세 서클 중 적어도 한 서클에 가입하고 있다. 세 서클에 들어있는 학생의 집합을 각각  $A, B, C$  라로 할 때, 다음 조건을 만족한다고 한다.  $n[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)]$  를 구하여라.<sup>11)</sup>

$n(A)=37,$	$n(B)= 32,$	$n(C)=21,$	$n(A \cap B \cap C)=5$
------------	-------------	------------	------------------------

12. 임의의 두 집합  $X, Y$ 에 대하여 연산  $\odot$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$X \odot Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

1에서 30까지의 정수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 차례로  $A, B, C$ 라 할 때,  $A \odot (B \odot C)$ 의 원소의 개수를 구하시오.<sup>12)</sup> (1992 도 경시)

Lined writing area with horizontal dashed lines for notes.