미국·수학경시

기출 문제집

www.gichool.com

1983~2008

AIME

American Invitational Mathematics Examination 1983~2008

도서출판 Gichool.com

문제 풀이에 관한 논의는 메일 kwan0912@hanmail.net 으로 보내주시면 감사의 자료와 더불어 응답드리도록 하겠습니다.

introduction

이 책의 머리말

The AIME (American Invitational Mathematics Examination)
란 AMC 10(고1 수준) 또는 AMC 12(고3 수준)의 미국수학경시대회와 USAMO(미국수학올림피아드)의 사이에 있는 시험을 말한다.

AMC 12를 치루어 100점 이상의 점수(150점 만점)를 얻은 모든 학생들이 AIME에 초청된다. AMC 10을 치른 학생들 중, 120점을 넘은 학생들 또는 상위 1%의 모든 학생들에게도 AIME를 치룰 자격이 주어진다. 1983년도부터 연1회 시행되던 AIME는 2000년 부터 AIME I, II로 약 일주일 간격을 두고 실시되었다. 2008년에는 AIME I이 3월 18일에, AIME II가 4월 2일에 치루어졌다.

AIME는 북아메리카 대륙의 특별한 수학적 재능을 가진 고등학생들에게, AMC 10 또는 AMC 12에서 보여주는 그 이상의 앞선 진취적 사고와 인식을 제공하기 위한 시험이다. 미국에 거주하고 있는 최고점을 얻은 합법적인 미합중국과 캐나다(가중평균에 기초한 점수를 획득한)의 시민권을 가진 학생이 USAMO에 초청된다.

AIME는 15문항, 3시간이 주어지는 시험으로, 각 문항은 0부터 999까지의 정수로 답하도록 되어있다. AIME의 문항들은 매우 어려운 편이고, 학생들이 추측으로 답을 얻어낼 수 없도록 출제된다. AMC 10과 AMC 12 (그리고 USAMO)에서처럼, AIME의 모든 문제들은 미적분학을 사용하지 않고, 그 이전 학습단계의 방법으로 풀어낼 수 있다. 전자계산기의 사용은 금지된다.

AIME는 이전에 수학적 재능에 대한 도전의 기회를 갖지 못한 특별한 학생들에게 시험을 치룰 기회를 제공한다. 모든 시험에서와 마찬가지로, 에이미가 수학적으로 한발 더 나아가도록 발전과 흥미를 유도하는 수단인 것만은 아니다. 이 시험의 진정한 가치는 사전에 준비되어있는 학습과정이나 풀이들에 관한 진취적인 사고와 논의로부터 얻어낼 수 있는 것들을 배우고자 하는 데 있다.

번역 신동관 [mail to kwan0912@hanmail.net]

* 역자㈜ 1) 주관식으로 의역하면서 많은 부분 원문과 다르게 고쳐진 부분이 있으나, 문제의 본 뜻은 바뀌지 않도록 번역하였음을 참고하기 바랍니다. 정수로 답하도록 하기위해 원래 문제의 의도와 관계없이 붙여진 뒷부분의 불필요한 과정은 생략한 문항이 많습니다. (*)문항의 표시는 고등학교 2학년 이상에 해당하는 문제입니다.
문제에 관한 논의는 위 메일로 보내주시면 감사하겠습니다.

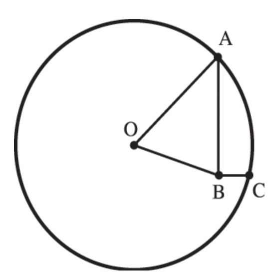
CONTENTS

01 x, y, z 는 모두 1보다 큰 실수이다. 양의 실수w가 $w=x^{24}$, $w=y^{40}$, $w=(xyz)^{12}$를 만족할 때, $w=z^{k}$이다. 실수 k의 값은?

02 $0<p<15$, $p \leqq x \leqq 15$일 때, 다음 식 $|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$ 의 최솟값을 구하여라.

03 방정식 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$ 의 모든 실근의 곱을 구하여라.

04 *점 A와 C는 반지름이 $\sqrt{50}$ 이며 중심이 O인 원 위에 있다. 점 B가 원 O의 내부에 있다. 그리고 $\angle \mathrm{ABC}=90°$, $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$일 때, $\overline{\mathrm{OB}}$의 길이는?



05

* 복소수 w와 z에 대하여, $w^2+z^2=7$, $w^3+z^3=10$이다. 실수 $w+z$ 의 최댓값을 구하면?

06

$a_n=6^n+8^n$ 이다. a_{83} 을 49로 나눈 나머지는?

07

원탁의 기사 25명이 둥근 탁자의 주위에 둘러앉아 있다. 기사들 가운데 임의로 3명을 선택한다. 그 기사들 중 적어도 어느 두 명이 서로 이웃하게 앉아 있었던 두 명이었을 확률을 구하여라.

08

$\dfrac{200!}{100!\times 100!}$을 소인수분해하였을 때, 그 소인수들 중에서 가장 큰 2자리의 소인수는 무엇인가?

09

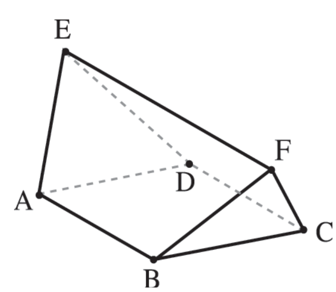
$0 < x < \pi$일 때, $\dfrac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$의 최솟값을 구하여라.

10

1997, 1006, 1351과 같이, 1000의 자릿수가 1인 4자리 수 가운데 정확히 어느 두 자리의 자릿수만 똑같은 수들은 모두 몇 개인가?

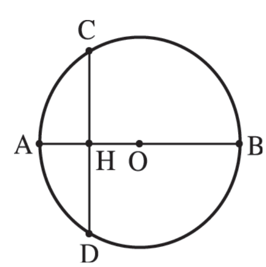
11

오른쪽 그림에서 정사각형 ABCD는 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$이다. 그리고 $\overline{EF}$는 그 길이가 $12\sqrt{2}$이고, 정사각형 ABCD에 평행하게 놓여있다. 면 BCF 와 ADE는 모두 정삼각형이다. 이 입체도형 ABCDEF의 부피를 구하여라.



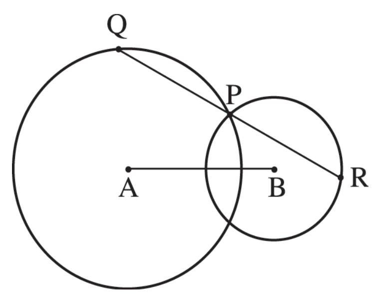
12

오른쪽 그림에서 현 CD는 지름 AB와 점 H에서 수직으로 만난다. $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 그 길이가 모두 정수이다. 그리고 $\overline{AB}$의 길이는 2자리 정수이고, $\overline{CD}$는 AB의 10의 자리와 1의 자리의 수의 위치를 교환하여 얻게 되는 2자리의 수이다. 또, $\overline{OH}$의 길이는 0이 아닌 유리수이다. $\overline{AB}$의 길이는 얼마인가?

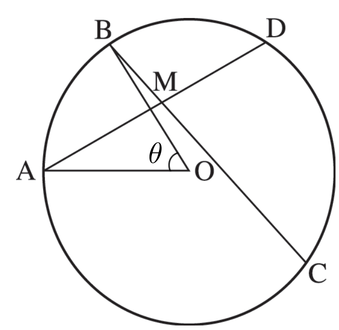


13 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 공집합이 아닌 임의의 각 부분집합에 대하여 각 집합에 속한 수들을 작아지는 순으로 배열하고 그 수들의 사이에 $-$, $+$의 연산기호를 차례대로 번갈아 가면서 넣어서 계산 값(교대합)을 구할 때, 그 계산한 값(교대합)들의 총합은? 예를 들어, $\{5\}$에서 계산값 5를 얻을 수 있고, $\{6,\ 3,\ 1\}$에서는 $6-3+1=4$를 얻을 수 있다.

14 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=12$이다. A는 반지름이 8인 원의 중심이다. 그리고 B는 반지름이 6인 원의 중심이다. 두 원의 서로 다른 두 점에서 만나고 있는데, 그 중 한 점이 P이다. P를 지나는 한 직선이 두 점 Q 와 R에서 두 원에 교차하고 있다. 큰 원에 교차하는 점이 Q이고 작은 원에 교차하는 점이 R이다. 또, $\overline{QP}=\overline{PR}$이다. $\overline{QP}^2$의 값을 구하여라.



15 반지름이 5인 원 O가 있는데, 원 O의 한 현 BC는 길이가 6이다. 원 O의 원주 위의 정점 A는 C보다 B에 가깝다. 한편, 그림처럼 현 AD는 현 BC에 의하여 이등분되고 있다. $\angle AOB$의 크기가 θ일 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.



American
Invitional
Mathematics
Examination

정답 및 풀이

도서출판 Gschool.com 기출닷컴

내 · 신 · 최 · 강 · 기 · 출 · 닷 · 컴

CONTENTS

1st AIME 1983

1. 풀이 $w = x^{24} = y^{40} = x^{12}y^{12}z^{12}$

$\therefore w^{10} = x^{120}y^{120}z^{120} = w^5w^3z^{120}$

따라서 $w = z^{60}$이므로 구하는 $k = 60$이다.

2. 해설 조건에 의하여 다음이 성립한다.

$|x-p| = x-p,\ |x-15| = 15-x,\ |x-p-15| = 15+p-x$

따라서 $x=15$일 때, (식의 계산값)$=30-x$ 은 최솟값 15를 가진다.

3. 해설 $x^2+18x+30 = 2\sqrt{x^2+18x+45}$ 에서 $\sqrt{x^2+18x+45} = A$라 하자.

그러면 $x^2+18x+30 = A^2-15$이 된다.

$\therefore A^2-15 = 2A \quad \therefore A^2-2A-15=0$

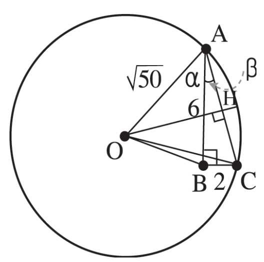
$\therefore (A-5)(A+3)=0 \quad \therefore A=5$ or -3

그런데 A는 양수이므로 $\mathrm{A}=5$

$\therefore x^2+18x+45=25 \quad \therefore x^2+18x+20=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱은 20이다.

4. 해설 $\angle \mathrm{OAB} = \alpha,\ \angle \mathrm{BAC} = \beta$ 라 하자. $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.



$\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점을 잡아서 H라고 하면 직각삼각형 AHO에서

$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{40}$ 이다. 그러므로 $\triangle$OAH에서 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = 2$이고

$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$이다. 그런데 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$이므로 $\tan\alpha = 1$이다.

따라서 $\triangle$OAB에서 cos 제2법칙으로 구하면 $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{26}$ 이다.

5. 해설 $w^2+z^2=7$에서 $(w+z)^2-2wz=7$이다.

$w^3+z^3=10$에서 $(w+z)^3-3wz(w+z)=10$이다.

$$\therefore\ (w+z)^3 - 3\cdot\frac{(w+z)^2-7}{2}\cdot(w+z) = 10$$

위 삼차방정식을 풀면 $w+z=-5,\ 1,\ 4$이다.
따라서 $w+z$의 최댓값은 4이다.

6. 해설 $6=7-1$, $8=7+1$이므로 이항정리에 의하여 $6^{83}=(7-1)^{83}$은 $83\times7-1$과 합동이고, $8^{83}=(7+1)^{83}$은 $83\times7+1$과 합동이다. 즉, $6^{83}+8^{83}\equiv2\times83\times7\equiv35(\text{mod } 49)$

7. 풀이 3명이 모두 이웃하여 있을 확률은 $\dfrac{25}{\dfrac{25\times24\times23}{3\times2\times1}}=\dfrac{1}{92}$

2명만 이웃하고 1명은 따로 있을 확률은 $\dfrac{21\times25}{\dfrac{25\times24\times23}{3\times2\times1}}=\dfrac{21}{92}$

(예를 들어 [1번, 2번]을 뽑아놓고서 이웃하지 않은 한 사람을 뽑는 방법은 21가지가 된다. 그러므로 [1번, 2번]부터 돌아가면서 [25번, 1번]까지 2명이 이웃하는 경우인 25가지 각각에 대하여 이웃하지 않은 한사람을 뽑는 방법은 21가지씩 된다.)

따라서, 구하는 확률은 $\dfrac{22}{92}=\dfrac{11}{46}$

8. 해설 만약 $\dfrac{200}{3}<p<100$인 소수 p가 있다면 p와 $2p$는 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 200\}$에 속하지만 $3p$는 속하지 못한다. 그러므로 $\dfrac{200}{3}<p<100$인 소수 p들은 분자의 $200!$에 2번 있고, 분모에도 모두 2번있으므로 약분 되어서, 주어진 수의 소인수가 될 수 없다. 반면에 $\dfrac{200}{3}$보다 작은 양의 소수들이 p라면 그 경우는 $p,\ 2p,\ 3p$는 모두 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 200\}$에 속하므로 그러한 p가 분자에 하나 남게 된다(약분을 2번 하고도). 따라서, 구하는 소인수중 가장 큰 소인수는 61임을 알 수 있다.

9. 해설 $0<x<\pi$일 때, $\sin x>0$이다. 산술-기하평균부등식으로 부터

$$\frac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}=9x\sin x+\frac{4}{x\sin x}\geq2\sqrt{36}=12$$

10. 해설 $1xxy$, $1xyx$, $1xyy$, $1xy1$, $1x1y$, $11xy$와 같은 모양을 가진 것들이 각각 72개씩 있다. 따라서 구하는 것들은 모두 432개이다.

별해 100의 자릿수가 1인 경우 72개, 10의 자릿수가 1인 경우 72개, 1의 자릿수가 1인 경우도 72개이다. 그리고 1이 아닌 다른 두자리의 자릿수가 똑같은 것들은 모두 $3\times(9\times1\times8)=216$개다. 따라서 구하는 것은 $216+3\times72=432$가지이다.

11. 정답 288

해설 $\overline{FE}$의 중점을 잡아서 M이라 하고, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$를 만들면 정사면체 두 개와 사각뿔을 하나 얻는다. 그것들의 부피를 구하여 더하면 된다.

12. 해설 $\overline{AB}=10m+n$라 하자. 그러면 $\overline{CD}=10n+m$이다.

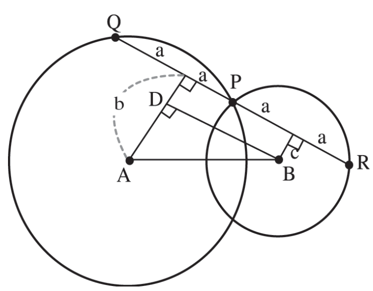
$\therefore \overline{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{11(m+n)(m-n)}$

그런데, $\overline{OH}$의 길이가 0이 아닌 유리수이므로 $m=6$, $n=5$이다.

따라서 구하는 $\overline{AB}$의 길이는 65이다.

13. 해설 주어진 집합의 2^7개의 부분집합 중 $\frac{1}{2}\cdot 2^7=2^6$개에는 7이 속해있다. 즉, 교대합의 총합에는 7×2^6이 더해져 있다. 7이 속하지 않는 2^6개의 부분집합중 $\frac{1}{2}\cdot 2^6=2^5$개의 집합의 최대원소는 6으로 교대합에는 6×2^4이 더해지기는 하지만, 원소 7이 속한 2^6개의 집합중 $\frac{1}{2}\cdot 2^6=2^5$개의 집합에 있는 두 번째 원소로서의 6은 교대합에 -6×2^4만큼 기여하므로 교대합의 총합에 기여하는 합은 여전히 7×2^6 뿐이다. 이와같이 전체 2^7개의 부분집합 중에는 7을 제외한 모든 원소의 합과 차가 동일하게 존재하므로, 구하는 값은 $7\times 2^6=448$.

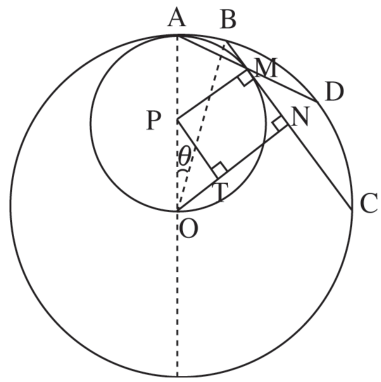
14. 해설 $\overline{QP}=2a$, 두 점 A, B로부터 직선 PQ까지의 거리를 각각 b, c라 하자. 그리고 점 B를 지나는 직선 PQ에 평행한 선을 그어서 그림처럼 직각삼각형 ABD를 만든다. 그러면 다음과 같이 식을 세울 수 있다.



$4a^2+(b-c)^2=144$, $b^2=64-a^2$, $c^2=36-a^2$

$\therefore\ 4a^2=130$이다.

15. 해설 점 M은 현 AD의 중점이고 점 D의 위치가 변할 때, 점M의 자취는 지름이 AO인 원이 된다. 이 원의 중심을 점 P라 하고 원 P는 현 BC와 점 M에서 접한다.



현 BC의 중점을 N이라 할 때, $\triangle ONB$는 직각삼각형이 되고 $ON=\sqrt{OB^2-BM^2}=4$. 따라서, $\tan\angle BON=\frac{3}{4}$이 된다. 또한, 점 P에서 ON에 내린 수선의 발을 T라 하면,

$ON=OT+TN=OP\cdot\cos\angle AON+PM$.

따라서, $\cos\angle AON=\frac{3}{5}$, $\tan\angle AON=\frac{4}{3}$이다.

$\angle AOB=\angle AON-\angle BON$이므로,

$$\tan\angle AOB=\frac{\tan\angle AON-\tan\angle BON}{1+\tan\angle AON\cdot\tan\angle BON}=\frac{7}{24}$$

$$\therefore\ \sin\angle AOB=\frac{7}{25}$$

2nd AIME 1984

1. 풀이 수열 $\{a_n\}$은 초항이 a이고 공차가 1인 등차수열이므로,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{98}=\frac{98\times(2a+97)}{2}=137, \qquad \therefore a=-\frac{2308}{49}$$

그러므로, 구하는 합은 다음과 같다.

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}$$
$$=\frac{49\times\left(2\times\left(-\frac{2308}{49}+1\right)+48\times2\right)}{2}$$
$$=-2308+49+49\times48=93$$

2. 풀이 $15n$은 5로 나누어떨어진다. 그러므로 그 끝수는 0이다. 또한 $15n$은 3으로 나누어떨어진다. 그러므로 각 자릿수들의 합은 3으로 나누어떨어진다. 그러므로 적어도 3개의 8이 있다. 그러므로 $15n$의 최솟값은 8880이다. 따라서, 구하는 $n=\frac{8880}{15}=592$이다.