# 아시아태평양 수학올림피아드 *1989~2007*

## 분야별 문제 은행 목차

**■ 1부**



**■ 2부**



**■ 3부**



**올림피아드에듀**

http://www.olympiadedu.net

전진을 기원하며!

번역에 도움을 주신 신중혁 회원님께 감사를 드립니다.
풀이는 국내외의 각종자료를 참고하였음을 말씀드립니다.
이의나 조언 또는 새로운 풀이는
kwan0912@hanmail.net 으로 보내주시면 감사하겠습니다.



신샘드림

■ 제 I 부 ■

# 아시아태평양 수학올림피아드 1989~2007

## 분야별 문제 은행

# 아시아태평양수학올림피아드 1989~2007

## Number Theory Problem Set

1) 등식 $5n^2=36a^2+18b^2+6c^2$ 은 $a=b=c=n=0$ 이외의 정수해를 갖지 않음을 증명하여라.

[1st APMO, 1989]

2) 학교에서 $n$명의 학생들이 쉬는 시간에 게임을 하기 위하여 선생 둘레에 둥글게 앉아 있다. 선생은 학생들 사이를 시계방향으로 돌면서 다음과 같은 규칙에 의하여 몇몇 학생에게 과자를 나누어 준다. 선생은 먼저 한 학생을 택하여 과자를 주고, 다음 학생은 건너뛰고 그 다음 학생에게 과자를 준다. 다음에는 두 사람을 건너뛰고 그 다음 학생에게 과자를 주고 다음에 세 사람을 건너뛰고 그 다음 학생에게 과자를 주며, 건너뛰는 학생수를 한 사람씩 늘려 가면서 이것을 계속한다. (여러바퀴를 돌 때) 모든 학생이 적어도 한 개의 과자를 갖게 될 $n$의 값을 모두 구하여라.

[3rd APMO, 1991]

3) $n$을 $n>3$인 정수라 한다. 집합 $\{2, 3, \cdots, n\}$에서 서로 다른 세 수를 선택하여 이 세 수를 각각 한 번씩만 사용하고, 덧셈, 곱셈과 괄호 만으로 묶여서 모든 가능한 결합을 만든다.

[4th APMO, 1992]

(1) 세 수가 모두 $\frac{n}{2}$보다 크면 이들 결합의 연산값은 모두 다름을 보여라.

(2) $p$를 $p\leq\sqrt{n}$인 소수라 하자. 선택한 세 수 중 최소의 수가 $p$이고, 모든 결합의 연산값이 전부는 다르지 않은 세 수의 선택 방법의 가짓수는 $p-1$의 양의 약수의 개수와 같음을 밝혀라.

4) 방정식 $x^n+(2+x)^n+(2-n)^n=0$

이 정수해를 가질 수 있는 모든 양의 정수 $n$을 구하여라. [5th APMO, 1993]

5) $a$, $b$가 서로 소인 정수일 때, $n$은 $a^2+b^2$인 꼴의 정수라 하자. 그리고, 만일 $p$가 $p\leq\sqrt{n}$인 소수이면 $ab$는 $p$로 나누어진다고 한다. 이러한 $n$을 모두 구하여라.

[6th APMO, 1994]

6) A, B, C의 세 집합이 다음과 같이 주어져 있다. 집합 A는 10진법으로 $10^k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)인 꼴의 수로 이루어지고, 집합 B, C는 집합 A의 수를 각각 2진법과 5진법으로 나타낸 수로 이루어져 있다.

| A | B | C |
|---|---|---|
| 10 | 1010 | 20 |
| 100 | 1100100 | 400 |
| 1000 | 1111101000 | 13000 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$n>1$인 모든 정수 $n$에 대하여, 자리수가 $n$인 것이 집합 B나 C의 어느 한쪽에만 꼭 한 개 존재함을 증명하여라. [6th APMO, 1994]

7) $a_1, a_2, \cdots, a_n$은 2와 1995사이의 값을 가지고, 다음 조건을 만족시키는 정수로 된 수열이라 하자.

(a) 임의의 두 $a_i$는 서로 소이다.

(b) 각 $a_i$는 소수이든가 서로 다른 소수들의 곱이다.

이 수열이 반드시 소수를 포함하도록 하는 $n$의 최소값을 정하여라. [7th APMO, 1995]

8) $100 \leqq n \leqq 1997$일 때, $\dfrac{2^n+2}{n}$가 정수가 되는 정수 $n$을 구하여라. [9th APMO, 1997]

9) 임의의 양의 정수 $a$와 $b$에 대하여 $(36a+b)(a+36b)$는 2의 거듭제곱으로 나타낼 수 없음을 보여라. [10th APMO, 1998]

10) 자연수 $n$은 $\sqrt[3]{n}$보다 작은 모든 자연수로 나누어 떨어진다. 이러한 자연수 $n$ 중 가장 큰 수를 구하여라. [10th APMO, 1998]