중등심화수학

기하 - 하

올림피아드 수학원
신샘수학교실 T. 439-4312

1. 기본도형의 성질

1. 기본도형

(1) 점과 직선

① 한 점을 지나는 직선은 무수히 많다.

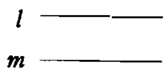
② 한 직선 위에는 무수히 많은 점이 있다.

③ 두 점을 직선은 오직 한 개다.

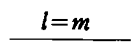
(2) 직선 · 평면의 위치 관계

① 평면에서 두 직선의 위치 관계

만난다

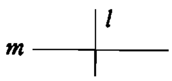


평행하다

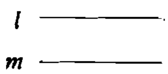


일치한다

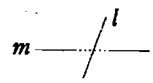
② 공간에서 두 직선의 위치 관계



만난다

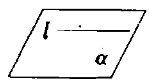


평행하다

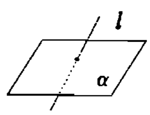


꼬인 위치에 있다

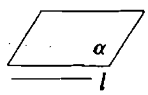
③ 직선과 평면의 위치 관계



포함된다



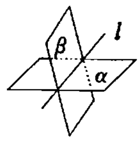
만난다



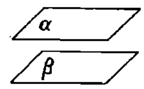
평행하다

✓참고 직선 l과 평면 α가 한 점 H에서 만나고, 평면 α 위의 점 H를 지나는 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이다. 기호로 $l \perp \alpha$로 나타낸다.

④ 공간에서 두 평면의 위치 관계

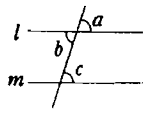


만난다 (l : 교선)



평행하다 $\alpha /\!/ \beta$

(3) 각



① 맞꼭지각 : 두 직선이 만날 때 생기는 네 개의 각 중 서로 마주보는 한 쌍의 각을 말하며 그 크기는 서로 같다.

② 동위각 : 두 직선이 평행할 때 $\angle a$, $\angle c$와 같이 같은 위치에 있는 두 각

③ 엇각 : 두 직선이 평행할 때 $\angle b$, $\angle c$와 같이 서로 엇갈려 있는 두 각

2. 다각형

(1) 삼각형의 변의 길이

삼각형의 한 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 차보다 크고 합보다 작다.

(2) 삼각형의 각

① 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

② 삼각형의 세 외각의 크기의 합은 360°이다.

③ 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

(3) 다각형의 대각선의 개수

① n각형의 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 개수 : $(n-3)$개

② n각형의 대각선의 총 개수 : $n\frac{(n-3)}{2}$개

(4) 다각형의 내각과 외각의 크기의 합

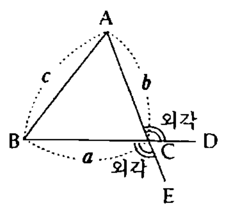
① n각형의 내각의 크기의 합 : $180° \times (n-2)$ ② n각형의 외각의 크기의 합 : 360°

(5) 정다각형의 한 내각과 외각의 크기

① 정 n각형의 한 내각의 크기 : $\frac{180° \times (n-2)}{n}$ ② 정 n각형의 한 내각의 크기 : $\frac{360°}{n}$

3. 삼각형

(1) 삼각형의 성질



① 삼각형의 내각 : △ABC의 ∠A, ∠B, ∠C를 말한다.

② 삼각형의 외각 : △ABC에서 변 BC, AC를 연장할 때,

∠ACD와 ∠BCE를 ∠C의 외각이라 한다.

③ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

④ 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

⑤ 삼각형의 변의 길이 : 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다. 즉, 세 변의 길이가 a, b, c일 때, $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$이다.

(2) 합동의 뜻

한 평면도형을 모양이나 크기를 바꾸지 않고 옮겨서 다른 평면도형에 완전히 포갤 수 있을 때, 이 두 도형을 합동이라 한다.

(3) 삼각형의 합동조건

① 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS합동)

② 대응하는 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 각각 같을 때(SAS합동)

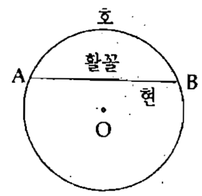
③ 대응하는 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 각각 같을 때 (ASA합동)

(4) 직각삼각형의 합동조건

① 빗변과 다른 한 변의 길이가 같을 때 (RHS합동)

② 빗변과 한 예각의 크기가 같을 때 (RHA합동)

4. 원



■ 원 : 평면 위의 한 정점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합
■ 호 : 원 의 한 점 A에서 점 B까지의 원주 부분을 호라고 하며
기호로 $\overset{\frown}{AB}$로 나타낸다.
■ 현 : 원 위의 두 점 A, B를 이은 선분을 현이라 하고 중심 O를 지나는
현을 그 원의 지름이라 하나.
■ 활꼴 : 호 AB와 현 AB로 이루어진 도형을 활꼴이라 한다.
■ 부채꼴 : 호 AB와 두 반지름 OA, OB로 이루어진 도형을 부채꼴이라 하고,
$\angle AOB$를 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각 또는 부채꼴의 중심각이라 한다.

(1) 중심각과 호
① 한 원에서 중심각의 크기가 같은 호의 길이는 서로 같다.
② 한 원에서 호의 길이는 그에 대한 중심각의 크기에 비례한다.

(2) 중심각과 현
① 한 원에서 중심각의 크기가 같은 현의 길이는 서로 같다.
② 한 원에서 현의 길이는 그에 대한 중심각의 크기에 비례하지 않는다.

(3) 접선과 반지름
① 원의 접선은 그 접점과 원의 중심을 연결한 선분에 수직이다.
② 원 위의 한 점을 지나고 그 점과 원의 중심을 연결한 선분(반지름)에 수직인 직선은 그 원의 접선이다.

(4) 원의 넓이와 둘레의 길이
반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 S, 둘레의 길이를 이라 하면

$$S=\pi r^2,\ l=2\pi r$$

(5) 부채꼴의 넓이와 호의 길이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$$l=2\pi r\times\frac{x°}{360°},\quad S=\pi r^2\times\frac{x°}{360°}=\frac{1}{2}rl$$

5. 입체도형

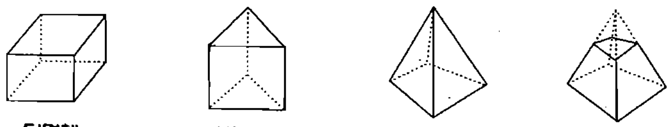
(1) 다면체

① 다면체 : 다각형의 면만으로 둘러싸인 입체도형으로 면의 개수에 따라 사면체, 오면체, 육면체 등 이 있다.

② 각기둥 : 두 밑면이 평행하고 합동인 다각형으로 옆면이 모두 직사각형인 입체도형

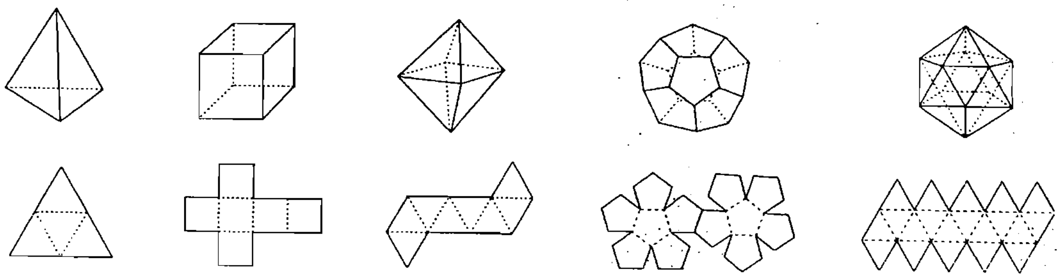
③ 각뿔 : 밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 다면체

④ 각뿔대 : 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 잘라서 생기는 두 입체도형 중 각뿔이 아닌 쪽의 다면체



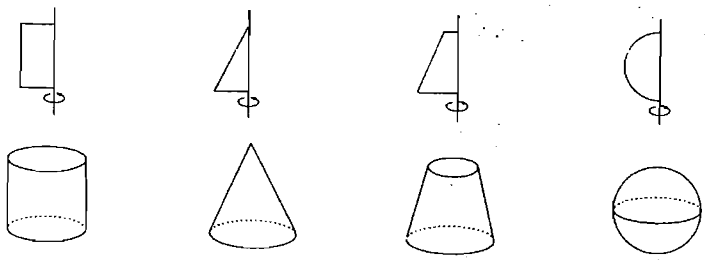
다면체 삼각기둥 사각뿔 사각뿔대

(2) 정다면체 : 각 면이 모두 합동인 정다각형이고, 각 꼭지점에 모이는 면의 개수가 같은 볼록한 다면체로 다음 다섯 가지가 있다.



정사면체 정육면체 정팔면체 정십이면체 정이십면체

(3) 회전체 : 평면도형을 한 직선을 축으로 하여 한 바퀴 회전할 때 생기는 입체도형



원기둥 원뿔 원뿔대 구

✓ NOTE 회전체의 성질

회전체를 그 축에 수직인 평면으로 자르면 그 단면은 항상 원이다.

회전체를 그 축을 포함한 평면으로 자르면 그 단면은 모두 합동이고 축에 대한 선대칭도형이다.

6. 입체도형의 겉넓이와 부피

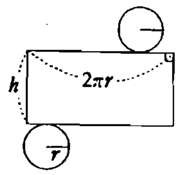
(1) 각기둥

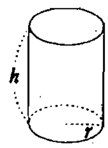
(겉넓이) =(옆넓이) +(밑넓이) ×2, (부피) =(각 기둥의 밑넓이) ×(높이)

(2) 원기둥

원기둥의 밑넓이를 S, 옆넓이를 S′, 높이를 h, 밑면의 반지름의 길이를 r이라 하면

(겉넓이) $=2\mathrm{S}+\mathrm{S}'=2\pi r^2+2\pi rh$, (부피) $=\mathrm{S}h=\pi r^2 h$





(3) 각뿔

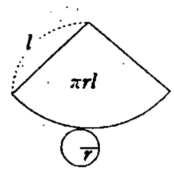
밑넓이가 S, 높이가 h라 하면 (겉넓이) =(밑넓이) +(옆넓이), (부피) $=\frac{1}{3}\mathrm{S}h$

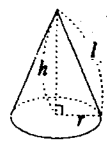
(4) 원뿔

원뿔의 밑넓이를 S, 옆넓이를 S′, 밑면의 반지름의 길이를 r,

모선의 길이를 l이라 하면

(겉넓이) $=\mathrm{S}+\mathrm{S}'=\pi r^2+\pi rl$, (부피) $=\frac{1}{3}\mathrm{S}h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$





(5) 구

반지름이 r인 구에서 (겉넓이) $=4\pi r^2$, (부피) $=\frac{4}{3}\pi r^3$

3. 오일러의 공식(교과외 공식)

꼭지점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라 하면

(1) 수형도 : 꼭지점과 변으로 이루어진 도형 중에서 단일폐곡선으로 된 부분이 없는 도형 $v-e=1$

(2) 꼭지점과 변으로 이루어진 도형 : $v-e+f=1$

(3) 오일러의 공식

① 연결 상태가 구와 같은 다면체 : $v-e+f=2$

② 연결상태가 타이어 튜브(도우넛)와 같은 입체도형 : $v-e+f=0$

정다면체	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
면의 모양(정다각형)	정삼각형	정사각형	정삼각형	정오각형	정삼각형
한 꼭지점에 모인 면의 수	3개	3개	4개	3개	5개
꼭지점(v), 모서리(e)의 수	$v=4$, $e=6$	$v=8$, $e=1$	$v=6$, $e=1$	$v=20$, $e=3$	$v=12$, $e=3$

§1. 기본도형

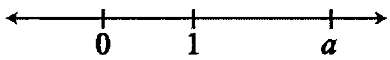
[예제 *1.*] 점

좌표평면에서 직선 l 이 있다. x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 서로 다른 두 점이 직선 l 상에 있으면, 직선 l 상에는 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이 무한히 많이 있음을 보여라.[1)]

2. 각 꼭지점이 격자점 (정수를 좌표로 갖는 점)인 정삼각형은 존재하지 않음을 증명하여라.[2)]

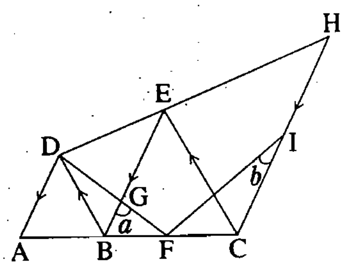
[예제 *3.*] 선분과 작도

아래 수직선에서 $\sqrt{a}$ 를 작도하는 방법을 설명하여라.[3)] [제4회 KMC 고1, 20점]

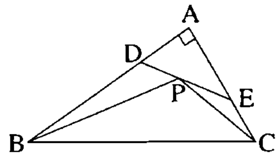


[예제 *4.*] 각

오른쪽 그림에서 점 B는 선분 AC 위에 있고, $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{BE}=\overline{CE}$이다. 선분 BC의 중점을 F, 선분 BE와 선분 DF의 교점을 G, 점 C를 지나고 선분 BE에 평행한 직선과 직선 DE의 연장선과의 교점을 H라 한다. 선분 CH위에 $\overline{IF}=\overline{IH}$가 되는 점을 I라 하고, $\angle BGF=a$, $\angle CIF=b$일 때, $\angle DFH$를 a, b에 관한 식으로 나타내어라.[4)]



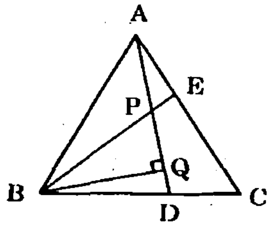
5. $\angle AOB$가 90°인 직각삼각형 OAB를 테두리로 하고, 당구공을 굴린다고 하자. 단, 각 변에서 입사각과 반사각의 크기는 같고, 당구공의 크기는 무시하기로 한다. 점 A에서 당구공을 쳤을 때, 각 변에 1회씩 부딪치고 점 B에 도달하는 것이 가능하기 위해서는 $\angle OAB$의 크기를 어떻게 해야 하는지 구하여라.[5)]



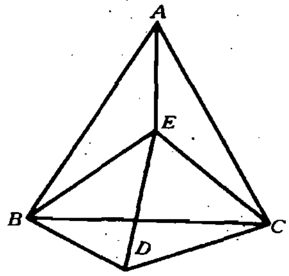
§2. 삼각형의 합동

[예제 6.] 정삼각형과 합동

정삼각형 ABC에서 $\overline{AE}=\overline{CD}$ 가 되도록 점 E, D를 변 AC, BC 위에 잡고 선분 AD와 BE가 만나는 점을 P, B 에서 AD 에 내린 수선의 발을 Q 라 할 때, $\angle PBQ$ 의 크기를 구하라.6)



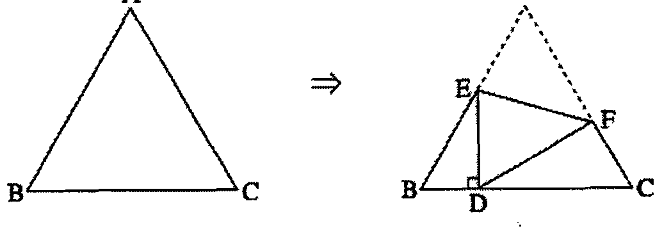
7. 그림과 같이 정삼각형 ABC와 CDE가 있다.
$\angle EBD=62°$일 때, $\angle AEB$의 크기를 구하라.7)



8. 정삼각형 ABC 내부에 $\overline{DB}=\overline{DA}$, $\overline{BF}=\overline{AB}$, $\angle DBF=\angle DBC$ 가 되도록 점 D를 잡을 때, $\angle BFD$의 크기를 구하라.8)

9. $\angle B=\angle C=80°$ 인 이등변삼각형 ABC의 변 CA, AB 위에 각각 점 D, E를 잡고, $\angle CBD=60°$, $\angle BCD=50°$ 되게 할 때, $\angle BDE$의 크기를 구하여라.9)

10. 아래 그림과 같이 정삼각형 ABC의 꼭지점 A가 변 BC 위의 점 D와 겹치도록 접었다. 변 BC와 AC의 접힌 점을 각각 E와 F라 할 때, $\overline{ED}\perp\overline{BC}$가 되었다고 한다. $\overline{BD}=1$이고 △EDF의 넓이를 a라 할 때, $(8a-3\sqrt{3})^2$의 값은 얼마인가?10) [2002학년도 후기 KMC 중3, 4점]

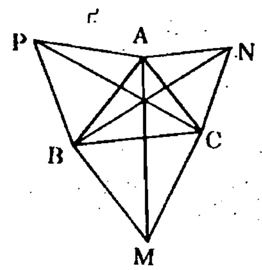


[예제 *11.*] 삼각형과 합동의 증명

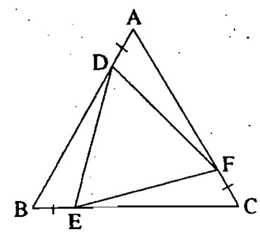
정삼각형 ABC 가 있다. D, E 는 각각 BC, BA 의 연장 위의 점이고, $AE = BD$ 이면, $CE = DE$ 임을 증명하라.11)

12. 정삼각형 ABC가 주어져 있다. $\overline{BC}$의 연장선상에 점 D, $\overline{BA}$의 연장선상에 점 E를 잡고 $\overline{AE} = \overline{BD}$ 되게 한다. $\overline{CE} = \overline{DE}$ 임을 증명하시오.12)

13. $\triangle ABC$ 는 임의의 삼각형이고 $\triangle ABP$, $\triangle BCM$, $\triangle CAN$ 은 모두 정삼각형이다. 이 때, $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP}$ 임을 증명하라.13)



14. 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC의 변 AB, BC, CA 위에 각각 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$가 되도록 점 D, E, F를 잡으면 $\triangle DEF$는 정삼각형임을 증명하여라.14)



15. 임의의 삼각형의 한 내각의 이등분선이 바로 그 각의 대변에 그은 중선이면 이 삼각형은 이등변삼각형임을 증명하라.15)