

중등심화수학

대수 - 하



올림피아드 수학원
신샘수학교실 T. 439-4312

§ 1. 집합과 원소

[예제 1.] 집합의 상등과 원소

두 집합 A, B 가 $A = \{p \mid p = 2x + 3y, x, y \text{는 정수}\}, B = \{q \mid q = 3a + 4b, a, b \text{는 정수}\}$ 일 때, $A = B$ 임을 증명하시오.¹⁾

2. 자연수의 집합에서 k 의 배수의 집합을 A_k 라 한다.

$(A_3 \cap A_{12}) \supset A_m$ 를 만족하는 최소값 m , $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_n$ 를 만족하는 최대값 n 에 대하여 $m + n$ 의 값을 구하시오.²⁾ [1993 도 경시]

3. 자연수의 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 와 자연수의 집합 $B = \{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\}$ 가 있다.

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $A \cap B = \{a_1, a_2\}$, $a_1 + a_2 = 13$ 일 때, 자연수의 집합 A 를 구하시오.³⁾

[1995 도 경시]

4. 다음 두 조건을 만족시키는 네 수 a, b, c, d 를 모두 구하여라.⁴⁾ [제11회 KMC 중3, 15점]

(i) $a \leq b \leq c \leq d$

(ii) $A = \{a + b, a + c, a + d, b + c, b + d, c + d\} = \{42, 48, 54\}$

[예제 5.] 조건을 만족하는 원소와 집합의 구성

집합 A를 다음의 조건 (1), (2), (3)을 만족시키는 실수의 부분집합이라고 할 때, $\sqrt{2002} + 2001 \in A$ 임을 보여라.⁵⁾ [01-제15회 KMO 중등부 오후]

- (1) $1 \in A$
- (2) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$
- (3) $(x-3)^2 \in A \Rightarrow x \in A$

6. 음이 아닌 수들의 집합 S에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) $0 \in S$
- (2) $s \in S$ 이면, $s + \frac{1}{5} \in S$ 이다.
- (3) $a \in S$ 이고 $b \in S$ 이며 $b \neq 0$ 이면, $\frac{a}{b} \in S$ 이다.

이때, $a \in S$ 이고 $b \in S$ 이면, $ab \in S$ 이고 $a + b \in S$ 임을 보여라.⁶⁾ [제9회 KMC 중1, 20점]

7. 실수 전체의 집합 R의 두 부분집합 $A_n, B_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 을

$$A_n = \left\{ x \mid \frac{1}{n+1} < x \leq 3 \right\}, \quad B_n = \left\{ x \mid \frac{1}{n} < x \leq 3 \right\}$$

이라 하고, 집합 $C_n = A_n - B_n$ 이라고 하자. 이 때, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_n \cup \dots$ 을 구하면?⁷⁾

[성균관대 제7회 고1, 4점]

- ① $\{x \mid -1 < x < 1\}$
- ② $\{x \mid 0 < x < 1\}$
- ③ $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\}$
- ④ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$
- ⑤ $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

8. 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$ 의 원소를 다음 보기와 같이 다시 나열한 것을 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{29}, x_{30}\}$ 이라 하자.

보기

예를 들어, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 원소를 다시 나열한 것이 $\{1, 4, 2, 3\}$ 이라면 $x_1=1, x_2=4, x_3=2, x_4=3$ 이 된다.

이 때, 다음 식의 값이 될 수 있는 가장 작은 값을 구하여라.⁸⁾ [제10회 KMC 중1, 15점]

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{30^2}{x_{30}}$$

§2. 집합의 연산

[예제 9.] 집합의 연산

전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 보기 중에서 항상 성립하는 것의 번호를 모두 곱하면 얼마인가?⁹⁾[2001년 KMC 후기, 고1 2점]

- 보기

 1. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
 2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
 3. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
 4. $A \cap (A^c \cup B) = A - B$
 5. $A - (A - B)^c = A - B$

10. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여, 다음 보기의 식 중에서 옳은 식의 번호를 모두 써라.¹⁰⁾ [2002년 성균관대 고1, 2점]

- 보기

 - ① $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$
 - ② $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$
 - ③ $(A - B) \cap C = (A - C) \cap (B - C)$
 - ④ $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
 - ⑤ $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

§3. 유한집합의 원소의 개수

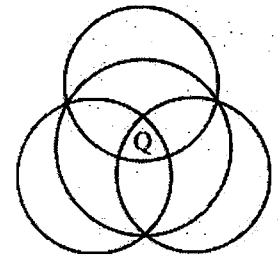
[예제 11.] 조건을 만족하는 원소의 개수

어떤 동호회의 구성원은 서울과 경기도에 사는 남·여 학생 및 남·여 일반인들로 이루어져 있다. 다음 자료를 보고 이 동호회의 전체 회원 수를 구하여라.¹¹⁾ [제2회 KMC 본선 중2, 15점]

남자 학생: 9명	서울 학생: 12명
남자 일반인: 10명	서울 남자: 12명
서울 사람: 24명	경기도 여자: 7명
경기도 남학생: 4명	

12. 오른쪽 그림과 같이 네 개의 원이 서로 교차하여 10개의 영역을 만들고 있다.

1부터 10까지의 자연수를 각 영역에 한 개씩만 써넣어 네 원 안에 있는 수들의 합이 모두 같도록 할 때, 영역 Q에 들어갈 수는 무엇인가?¹²⁾ [제4회 성균관대 중 3, 5점]



13. 1, 2, 3의 숫자만으로 된 n 자리 정수로 같은 숫자가 이웃하지 않는 것을 원소로 하는 집합을 $M(n)$ 이라 한다. 또 $M(n)$ 의 원소 중 숫자 1을 꼭 k 개 포함하는 자연수의 개수를 $a(n, k)$ 라 할 때,¹³⁾

- (1) $M(3)$ 를 구하여라.
- (2) $a(n, 0)$ 및 $a(n, 1)$ 을 구하여라.

14. 집합 S 의 부분집합의 개수를 P_S , 원소의 개수를 $n(S)$ 로 나타내기로 하자. $P_A + P_B = P_{A \cup B}$, $n(A) = 5$ 를 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B)$ 의 값을 구하여라.¹⁴⁾ [KMC 고1 기출]

Lined writing area with horizontal ruling lines.

[예제 15.] 오일러 ϕ -함수

자연수 n 에 대하여 집합 A_n 을

$$A_n = \{ x \mid x \text{는 } n \text{과 서로 소인 자연수} \}$$

라고 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? [1999학년도 대수능 3점]¹⁵⁾

<보기>

\neg . $A_2 = A_4$ \sphericalangle . $A_3 = A_6$ \subset . $A_6 = A_3 \cap A_4$

16. 양의 정수 n 에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에서 n 과 서로 소인수의 개수를 $h(n)$ 이라 할 때, 다음을 구하여라.¹⁶⁾

- (1) $h(3^3)$ (2) $h(5^l)$ (l 은 양의 정수) (3) $h(2^k \times 3^l)$ (k, l 은 양의 정수)

17. 오일러 ϕ -함수란 n 보다 작은 자연수 중에서 n 과 서로소인 수의 개수를 의미하며, $\phi(n)$ 으로 나타낸다. 예를 들면 $\phi(36) = 12$ 이다. 만일 n 이 서로 다른 소수 p_1, p_2, \dots, p_k 을 인수로 갖는다면, 포함과 배제의 원리에 의하여

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

가 성립한다. $\phi(36) = 12$ 을 확인하고 위 식을 증명하여라.¹⁷⁾ [신작]

18. 네 자리의 자연수에서 천의 자리의 수를 a_1 , 백의 자리의 수를 a_2 , 십의 자리의 수를 a_3 , 일의 자리의 수를 a_4 로 나타내자. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여, 다음을 만족시키고 각 자리의 수가 서로 다른 네 자리의 자연수는 모두 몇 개인가?¹⁸⁾ [2001년 KMC 후기 고1, 3점]

$$a_k \in A \cap \{k\}^c \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

