올림피아드 부등식 해결 전략

신샘수학교실 미래 www.olympiadedu.net

제 0장. 부등식 기본

0.1. 대소 관계는 기본적으로 뺄셈(또는 비율)으로 결정한다.

1. 예제 $a, b, c, d \in R^{+}$에 대하여 $a > b,\ c > d$일 때,

$$(a^d + b^d)(a^c - b^c) > (a^c + b^c)(a^d - b^d)$$

임을 보여라.

풀이

준 부등식을 전개하고 양변에서 $(a^{c+d} - b^{c+d})$를 빼면,

$$a^c b^d > a^d b^c$$

를 얻는다. 양변을 $a^d b^d$로 나누어

$$a^{c-d} > b^{c-d}.$$

조건으로부터 부등식이 참임을 확인할 수 있다.

2. 예제 $a,\ b,\ c \in R^{+}$일 때 $a^a b^b c^c \geqq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ 임을 증명하여라.

풀이

[1974 USAMO]

증명하려는 부등식은 다음 부등식과 동치이다.

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} \geqq 1$$

그런데 $\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}}$

여기서 $a \ge b \ge c > 0$이라고 하면,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}} \ge 1.$$

정리 **1.1.** $a \ge c,\ b \ge d$ 이면,

$$ac+bd \ge \frac{1}{2}(a+b)(c+d)$$

이고, 등호는 $a=b$ 또는 $c=d$일 때 만 성립한다.

증명

조건으로부터 $(a-b)(c-d) \ge 0$ 이므로

$$ac+bd \ge bc+ad,$$
$$2(ac+bd) \ge ac+bd+bc+ad \ge (a+b)(c+d).$$

3. 예제 $a, b \in \mathrm{R}^+$일 때

$$\frac{a^6+b^6}{2} \ge \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2}$$

임을 증명하시오.

풀이

$a \ge b$라고 가정하면 $a^2 \ge b^2, a^3 \ge b^3$이다.
그러므로, 정리 1.1을 이용하여

$$a^6+b^6 \ge \frac{1}{2}(a^3+b^3)(a^3+b^3), a^3+b^3 \ge \frac{1}{2}(a+b)(a^2+b^2)$$

이 두식을 변변 곱하고 정리하면
준 부등식을 얻을 수 있다.

정리 **1.2.** $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ 라면

$$(ax-by)^2 \ge (a^2-b^2)(x^2-y^2)$$

등호는 $ay = bx$ 일 때 성립한다.

증명

$$(ax-by)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2) = a^2y^2-2abxy+b^2x^2 = (ay-bx)^2 \ge 0.$$

4. 예제 $a \ge b \ge c \ge 0$ 일 때, $\sqrt{a(a-c)} - \sqrt{b(b-c)} \ge a-b$ 을 증명하시오.

풀이

정리 1.2로부터

$$\left(\sqrt{a(a-c)} - \sqrt{b(b-c)}\right)^2$$

$$\ge \left[(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\right]\left[(\sqrt{a}-c)^2-(\sqrt{b}-c)^2\right] = (a-b)^2$$

$a = b$ 또는 $c = 0$ 일 때 등호가 성립된다.

참고 정리 1.2의 부등식은 다음 표현과 동일하다.

$$(a-b)^2 \ge \left(\frac{a^2}{x}-\frac{b^2}{y}\right)(x-y),$$

$x > y$일 때, $\dfrac{(a-b)^2}{x-y} \ge \dfrac{a^2}{x}-\dfrac{b^2}{y}.$

0.2. 적당한 식의 분해와 결합을 통하여 변형한다.

5. 예제 $a, b \in R^{+}$일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a+b}{1-(a+b)^2} < \frac{b}{1-a^2} + \frac{a}{1-b^2}$$

풀이

$$\frac{|a+b|}{1-(a+b)^2} \le \frac{|b|}{1-(a+b)^2} + \frac{|a|}{1-(a+b)^2} < \frac{b}{1-a^2} + \frac{a}{1-b^2}.$$

6. 예제 $x, y, z \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$ 일 때, 다음 부등식을 증명하시오.

$$\frac{a+b}{c} z^2 + \frac{b+c}{a} x^2 + \frac{c+a}{b} y^2 \ge 2(xy + yz + zx)$$

풀이 [제곱법]

$$\frac{a+b}{c} z^2 + \frac{b+c}{a} x^2 + \frac{c+a}{b} y^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\, z - \sqrt{\frac{c}{a}}\, x\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}}\, z - \sqrt{\frac{c}{b}}\, y\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x - \sqrt{\frac{c}{b}}\, y\right)^2 \ge 0$$

7. 예제 임의의 자연수 $n > 2$에 대하여 다음을 보여라.

$$(2n-1)^n + (2n)^2 < (2n+1)^n$$

풀이 [이항정리]

$2^n < \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$과 동치이다.

우변을 이항 전개하면 된다.◇

0.3. 소거법(Telescoping Method)

8. 예제 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1} < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$$

풀이

$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 라 놓으면,

$$S > \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}.$$

$$S < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=2-\frac{1}{n}.$$

9. 예제 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

풀이

$M=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}$,

$L=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{98}{99}$,

$N=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{101}$ 이라 하자.

그러면, $L<M<N$ 이므로,

$\frac{1}{200}=LM<M^2<MN=\frac{1}{101}$,

$\frac{1}{15}<\frac{1}{\sqrt{200}}<M<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$.