

올림피아드 부등식 해결 전략

0. 부등식의 기본	... page 03
0.1.대소관계/0.2.분해와 결합/0.3.소기법/0.4.분식부등식법/ 0.5.구조법/0.6.확대,축소,유추를 통한 비교과 분석	
1. 신술-기하-조화 평균부등식	... page 21
1.1. 평균부등식의 다양한 증명방법/1.2.대수적 증명방법/ 1.3. 평균부등식의 다양한 문제들	
2. 코시-슈비르츠 부등식과 제베열 부등식	... page 41
2.1.코시-슈비르츠 부등식(네스빗부등식)/ 2.2.제베열 부등식과 체비세프 부등식	
3. 대칭형 부등식	... page 55
3.1.대칭식(동치식, 슈르부등식, 뮤어헤드부등식, 비동치식)/ 3.2.장규획(뉴튼, 맥클로린부등식)/3.3.대수적치환과 삼각치환	
4. 삼각부등식	... page 81
4.1.삼각형의 세 변과 관련된 부등식(슈르부등식)/ 4.2.삼각형의 세 각과 관련된 부등식(바이첵백부등식)/	
5. 함수의 부등식	... page 93
5.1.불록부등식(젠센, 멱평균, 헬디, 민코프스키부등식)/ 5.2.핀벌식과 부등식/5.3.지배(키리미티)부등식/ 5.4.단조함수 부등식/5.5.준기법적 부등식/5.6.집신의 직립	
6. 부등식의 해결 전략과 종합문제	... page 119
6.1~6.7.유형별 문제해결 전략 연습문제/6.8.수열과 부등식/ 6.9.디범수 함수의 최대최소/6.10.종합문제	
	『풀이판』 ... page 141

제 0 장. 부등식 기본

0.1. 대소 관계는 기본적으로 뺄셈(또는 비율)으로 결정한다.

1. **예제** $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 $a > b, c > d$ 일 때,

$$(a^d + b^d)(a^c - b^c) > (a^c + b^c)(a^d - b^d)$$

임을 보여라.



풀이

준 부등식을 전개하고 양변에서 $(a^{c+d} - b^{c+d})$ 를 빼면,

$$a^c b^d > a^d b^c$$

를 얻는다. 양변을 $a^d b^d$ 로 나누어

$$a^{c-d} > b^{c-d}.$$

조건으로부터 부등식이 참임을 확인할 수 있다.

2. **예제** $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 일 때 $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ 임을 증명하여라.



풀이

[1974 USAMO]

증명하려는 부등식은 다음 부등식과 동치이다.

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} \geq 1$$

$$\text{그런데 } \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}}$$

여기서 $a \geq b \geq c > 0$ 이라고 하면,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}} \geq 1.$$

정리 1.1. $a \geq c, b \geq d$ 이면,

$$ac + bd \geq \frac{1}{2}(a+b)(c+d)$$

이고, 등호는 $a=b$ 또는 $c=d$ 일 때 만 성립한다.



증명

조건으로부터 $(a-b)(c-d) \geq 0$ 이므로

$$ac + bd \geq bc + ad,$$

$$2(ac + bd) \geq ac + bd + bc + ad \geq (a+b)(c+d).$$

3. **예제** $a, b \in \mathbb{R}^+$ 일 때

$$\frac{a^6 + b^6}{2} \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2}$$

임을 증명하십시오.



풀이

$a \geq b$ 라고 가정하면 $a^2 \geq b^2, a^3 \geq b^3$ 이다.

그러므로, 정리 1.1을 이용하여

$$a^6 + b^6 \geq \frac{1}{2}(a^3 + b^3)(a^3 + b^3), a^3 + b^3 \geq \frac{1}{2}(a+b)(a^2 + b^2)$$

이 두식을 변변 곱하고 정리하면

준 부등식을 얻을 수 있다.

정리 1.2. $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ 라면

$$(ax - by)^2 \geq (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$$

등호는 $ay = bx$ 일 때 성립한다.



증명

$$(ax - by)^2 - (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 - (a^2x^2 - b^2y^2) = (ay - bx)^2 \geq 0.$$

4. **예제** $a \geq b \geq c \geq 0$ 일 때, $\sqrt{a(a-c)} - \sqrt{b(b-c)} \geq a - b$ 을 증명하십시오.



풀이

정리 1.2로부터

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a(a-c)} - \sqrt{b(b-c)})^2 \\ & \geq [(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2][(\sqrt{a} - c)^2 - (\sqrt{b} - c)^2] = (a - b)^2 \\ & a = b \text{ 또는 } c = 0 \text{ 일 때 등호가 성립된다.} \end{aligned}$$

참고 정리 1.2의 부등식은 다음 표현과 동일하다.

$$(a-b)^2 \geq \left(\frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{y}\right)(x-y),$$

$$x > y \text{ 일 때, } \frac{(a-b)^2}{x-y} \geq \frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{y}.$$

0.2. 적당한 식의 분해와 결합을 통하여 변형한다.

- 5.
- 예제**
- $a, b \in \mathbb{R}^+$
- 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a+b}{1-(a+b)^2} < \frac{b}{1-a^2} + \frac{a}{1-b^2}$$



풀이

$$\frac{|a+b|}{1-(a+b)^2} \leq \frac{|b|}{1-(a+b)^2} + \frac{|a|}{1-(a+b)^2} < \frac{b}{1-a^2} + \frac{a}{1-b^2}.$$

- 6.
- 예제**
- $x, y, z \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}^+$
- 일 때, 다음 부등식을 증명하시오.

$$\frac{a+b}{c} z^2 + \frac{b+c}{a} x^2 + \frac{c+a}{b} y^2 \geq 2(xy + yz + zx)$$



풀이

[제공법]

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{c} z^2 + \frac{b+c}{a} x^2 + \frac{c+a}{b} y^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= \left(\sqrt{\frac{c}{a}} z - \sqrt{\frac{c}{a}} x \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} z - \sqrt{\frac{c}{b}} y \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x - \sqrt{\frac{c}{b}} y \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 7.
- 예제**
- 임의의 자연수
- $n > 2$
- 에 대하여 다음을 보여라.

$$(2n-1)^n + (2n)^2 < (2n+1)^n$$



풀이

[이항정리]

$$2^n < \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \text{ 과 동치이다.}$$

우변을 이항 전개하면 된다.◇

0.3. 소거법(Telescoping Method)

8. **예제** 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$



풀이

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{라 놓으면,} \\ S &> \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}. \\ S &< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

9. **예제** 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$



풀이

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}, \\ L &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99}, \\ N &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101} \text{이라 하자.} \end{aligned}$$

그러면, $L < M < N$ 이므로,

$$\frac{1}{200} = LM < M^2 < MN = \frac{1}{101},$$

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{\sqrt{200}} < M < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}.$$